

# DESSINS D'ENFANTS

SAÚL QUISPE

**Introducción.** Las superficies de Riemann juegan un papel central en matemáticas, ya que son de interés en áreas como álgebra, análisis, geometría, teoría de números y topología. También tienen usos en física teórica, como en la teoría de cuerdas.

Encontrar vínculos entre estos aspectos de las superficies de Riemann utiliza ideas de la teoría de grafos y la combinatoria, especialmente mapas de superficies. Estos vínculos, principalmente con el álgebra y la combinatoria, más que con la teoría más profunda de las superficies de Riemann, serán mi tema principal.

**Contenido.** Las clases del curso estarán dedicadas a los siguientes temas:

- Sesión 1. Superficies de Riemann y grupos Fuchsianos. *Esta clase comenzaré con la definición (informal y formal) de superficie de Riemann, seguida de algunos ejemplos simples. Presentaré el Teorema de Uniformización, que implica que cada superficie de Riemann es un cociente, mediante un “buen” grupo de automorfismos, de una de las tres superficies simples, a saber, la esfera de Riemann, el plano complejo y el plano hiperbólico. Terminaré describiendo algunas de las propiedades básicas de los grupos Fuchsianos.*
- Sesión 2. Superficies de Riemann compactas y su grupo de automorfismos. *En 1890, Schwarz demostró que si  $X$  es una superficie de Riemann compacta de género  $g > 1$ , entonces su grupo de automorfismos es finito, en 1893 Hurwitz demostró que  $|\text{Aut}(X)| \leq 84(g - 1)$ . En esta clase, estudiaremos automorfismos de superficies de Riemann de género  $g \geq 0$ .*
- Sesión 3. Funciones de Belyi versus Dessins d'enfants (dibujos de niños). *Riemann demostró que las superficies de Riemann compactas son esencialmente curvas algebraicas complejas, definidas por polinomios con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . A principios de la década de 1980, Grothendieck se preguntó qué superficies de Riemann estaban definidas sobre el campo de los números algebraicos  $\overline{\mathbb{Q}}$ . De hecho esta pregunta ya había sido respondida unos años antes por Belyi. Grothendieck reinterpretó su solución en términos de mapas sobre superficies, a los que llamó dessins d'enfants. En esta clase, esbozaré la conexión entre la categoría de pares de Belyi y la categoría de dessins d'enfants y la ilustraré con algunos ejemplos.*
- Sesión 4. El grupo absoluto de Galois. *El grupo absoluto de Galois  $\mathbb{G}$  es el grupo de automorfismos del campo de números algebraicos  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Según el teorema de Belyi, una superficie compacta de Riemann (= curva algebraica) se define sobre  $\overline{\mathbb{Q}}$  si y sólo si se obtiene a partir de un dessin. En esta clase, estudiaremos la acción del grupo  $\mathbb{G}$  sobre los dessins.*

**Requisitos previos.** Los estudiantes que asistan al curso deben tener una sólida formación en: Teoría de grupos, teoría básica de Galois, topología básica y algebraica, y análisis complejo.

## REFERENCES

1. A. F. Beardon. Algebra and Topology. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005
2. E. Girono and G. González-Diez. Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012
3. G. A. Jones and D. Singerman. Complex Functions: An algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press; 1er edición, 2010.
4. W. S. Massey. A Basic Course in algebraic Topology. Graduate Texts in Maths.127, Springer, Berlin, New York, 1991
5. J. E. Marsden and M. J. Hoffman. Basic Complex Analysis. W.H. Freeman Berlin, New York, 1999
6. R. Miranda. Algebraic curves and Riemann surfaces, Graduate Studies in Mathematics **5**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
7. J. Rotman. First Course in Abstract Algebra, Pearson; 3er edición, 2005.
8. J. Rotman. Galois Theory, Springer; 2nd edición, 1998.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA. CASILLA 110-V, TEMUCO, CHILE

*Email address:* saul.quispe@ufrontera.cl